На правах рукописи

ЕГОРОВ ВЛАДИСЛАВ ВАЛЕРЬЕВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ НОРМИРОВАННОЙ МАТРИЦЫ ЯКОБИ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(01.01.01 — математический анализ)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Журавлев Игорь Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент
Латфуллин Тагир Гумерович

кандидат физико-математических наук, доцент
Шабалин Павел Леонидович

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Защита состоится 25 сентября в 16.00 час. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "   "   2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент   Е.К. Липачев

А. Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию систем дифференциальных уравнений специального вида, возникающих в теории отображений с ограниченным искажением.

Актуальность темы. Теория квазиконформных отображений, основы которой были заложены в работах Г. Греча и М.А. Лаврентьева в конце 20-х – начале 30-х годов XX века, в настоящее время представляют собой активно развивающийся раздел математического анализа и ее результаты находят многочисленные приложения в различных областях теоретической и прикладной математики.

В 1938 г. для построения математических моделей ряда явлений гидродинамики и газовой динамики М.А. Лаврентьевым была начата разработка теории пространственных квазиконформных отображений. Наиболее важные результаты в этой теории были получены в работах Л. Альфорса, П.П. Белинского, Ю. Вяйсяля, Ф. Геринга, В.А. Зорича, Ю.Г. Решетняка и других математиков.

Развитие теории пространственных квазиконформных отображений привело к созданию в середине 1960-х годов в работах Ю.Г. Решетняка теории пространственных отображений с ограниченным искажением. Значительный вклад в эти исследования внесли С.К. Водопьянов, М. Вуоринен, В.М. Гольдштейн, Т. Иванец, А. П. Копылов, С.Л. Крушкаль, Т.Г. Латфуллин, О. Мартио, В.М. Миклюков, С. Рикман, А.В. Сычев и многие другие.

Ряд методов исследования в этой области связан с использованием аппарата дифференциальных уравнений. В частности, квазиконформные отображения на плоскости можно рассматривать как гомеоморфные решения дифференциального (комплексного) уравнения Бельтрами с заданной функцией $\mu(z)$

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z). \tag{1}$$

Пространственным аналогом этого уравнения (дающим уравнение

Бельтрами при $n=2$) занимались, в частности, Г. Вейль, И.А. Схоутен, рассматривая следующую нелинейную переопределенную систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$f'^T(x)\, f'(x) = |\det f'(x)|^{2/n}\, G(x). \tag{2}$$

Здесь $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ (D — область в $\mathbb{R}^n$, $f'(x)$ — матрица Якоби отображения $f(x)$, T — транспонирование, $G(x)$ — матрица размерности $(n\times n)$, заданная в D).

В 1930-х гг. для описания локального поведения отображений М.А. Лаврентьев *) ввел следующее определение. Характеристиками квазиконформности отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, определенного в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и дифференцируемого почти всюду в D, назваются числовые параметры, заданные в D и определяющие почти в каждой точке x из D эллипсоид (или параллелепипед) из $\mathbb{R}^n$, который под действием дифференциала $d_x f$ переходит в сферу (или в куб со сторонами, сонаправленными векторам ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$). Характеристики квазиконформности, одной из которых является нормированная матрица Якоби $\frac{f'(x)}{|\det f'(x)|^{1/n}}$, оказались удобным средством для исследования и решения множества задач теории отображений с ограниченным искажением. И.В. Журавлевым **) были найдены необходимые и достаточные условия существования решения системы $f'(x) = |\det f'(x)|^{1/n}\, M(x)$ и посредством матрицы $\frac{f'(x)}{|\det f'(x)|^{1/n}}$ были описаны свойства этих решений.

Теория пространственных отображений и ее приложения диктуют необходимость постановки и решения как новых задач, так и получения обобщений результатов исследований, сделанных ранее. Представленная работа относится к указанному направлению анализа и очерченному кругу проблем, что обосновывает ее актуальность.

---

*) Лаврентьев М.А. Sur une classe de representations continues // Мат. сб., 1935, Т. 42, № 4, 407–424.

**) Журавлев И.В. К задаче о восстановлении отображения по нормированной матрице Якоби // Сиб. мат. журн. — 1993. — Т. 34, № 2. — С. 77–87.

Цель работы. Целью работы является исследование классов отображений и систем дифференциальных уравнений, связанных с нормированной матрицей Якоби. Изучается вопрос о возможности восстановления отображения по его нормированной матрице Якоби.

Методика исследования. Работа основана на результатах теории пространственных отображений с ограниченным искажением. В ней широко применяется аппарат внешних дифференциальных форм с суммируемыми коэффициентами, теория соболевских пространств.

Научная новизна. В диссертационной работе представлены результаты, связанные с задачей задачей восстановления отображения и описания его свойств в терминах обобщенной нормированной матрицы Якоби. Это обобщение связано с видом нормирующего матрицу Якоби множителя и с пространством функций, где производился поиск решений исследуемых задач. Все полученные результаты являются новыми.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Найдены необходимые и достаточные условия существования решений переопределенных систем дифференциальных уравнений, связанных с нормированной матрицей Якоби, в гладком случае.

2. Описаны необходимые и достаточные условия существования решений таких систем дифференциальных уравнений для отображений соболевских классов.

3. Получены интегральные представления, позволяющие восстановить отображение по нормированной матрице Якоби.

4. Описаны свойства пространственных отображений в терминах свойств нормированной матрицы Якоби.

5. Найдены условия, при которых изучаемые отображения являются отображениями с ограниченным искажением.

Практическая значимость результатов. Диссертация носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в научных коллективах, занимающихся исследованием отображений с ограниченным искажением (для развития этой теории), а также могут найти применение в теории уравнений с частными производными, в вариационном исчислении, в математической физике (например, в механике сплошной среды, в гидро- и газовой динамике).

Структура работы. Диссертация изложена на 107 страницах, состоит из введения, трех глав, заключения и библиографического списка. В работе использована подчиненная нумерация глав, формул и утверждений. Библиография содержит 53 наименования научных работ.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]–[8].

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на конференциях профессорско-преподавательского состава ВолГУ (1997–1998 гг.), на научной конференции молодых ученых Волгоградской области (Волгоград, 1998 г.), на научном межкафедральном семинаре «Геометрический анализ и его приложения» ВолГУ в 1999–2007 гг. (рук. д.ф.-м.н. проф. В.М. Миклюков, д.ф.-м.н. проф. А.А. Клячин, к.ф.-м.н. А.Н. Кондрашов), на научном межкафедральном семинаре «Сверхмедленные процессы» ВолГУ в 1999–2007 гг. (рук. д.ф.-м.н. проф. В.М. Миклюков), на международной школе-конференции «Геометрический анализ и его приложения» (Волгоград, 2004 г.), на VI молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2007» (Казань, 2007 г.), а также на 14-й Саратовской зимней школе-конференции «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2008 г.).

Автор выражает глубокую благодарность за полезные обсуждения, замечания и постоянное внимание к работе научному руководителю д.ф.-м.н. И.В. Журавлеву, а также коллегам по кафедре математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета д.ф.-м.н. В.М. Миклюкову, д.ф.-м.н. А.А. Клячину, д.ф.-м.н. В.А. Клячину, к.ф.-м.н. А.Н. Кондрашову. Кроме того, автор всемерно признателен своей маме, Л.Л. Егоровой, за бесконечное терпение и поддержку.

В. Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы, дается обзор предшествующих исследований по теме работы и обзор основных результатов автора.

Глава 1 «Матричная характеристика отображений» носит вводный характер.

В **§1.1** даются сведения из математического анализа, используемые в работе, уточняются обозначения, определения классов функций, излагаются элементы теории дифференциальных форм.

В **§1.2** сформулировано определение отображения с ограниченным искажением, приводится система дифференциальных уравнений, возникающая при описании отображений по нормированной матрице Якоби.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — отображение класса С. Л. Соболева $W^1_{p,loc}(D)$ $(p\geqslant 1)$. Тогда для почти всех $x\in D$ определена ее матрица Якоби $f'(x)$. Пусть также $\mathcal{M}_n$ — пространство $(n\times n)$-матриц с вещественными компонентами.

Определение *). *Отображение* $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ *называется отображением с ограниченным искажением, если*

1) $f(x)$ *непрерывно в* D*;*

2) $f(x)$ *принадлежит классу* $W^1_{n,loc}(D)$*;*

3) существует такое число Q*, что для почти всех* $x\in D$ *выполняется неравенство*

$$\Bigl(\sup_{|h|=1}|f'(x)h|\Bigr)^n\leqslant Q|\det f'(x)|\ ;$$

4) $\det f'(x)\geqslant 0$ *почти всюду в* D *или* $\det f'(x)\leqslant 0$ *почти всюду в* D.

Точную нижнюю границу значений Q, для которых почти всюду в D справедливо неравенство из условия 3), называют коэффициентом искажения отображения $f(x)$ и обозначают через $Q(f,D)$ или $Q(f)$.

*) Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982.

Квазиконформные отображения — гомеоморфные отображения с ограниченным искажением.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$f'(x) = \Phi(f'(x))M(x)\,, \tag{3}$$

где $f{=}(f^1,\ldots,f^n)\colon D{\to}\mathbb{R}^n$, $M{=}\big(m_{ij}\big)_{i,j=\overline{1,n}}\colon D{\to}\mathcal{M}_n$ — заданная матричнозначная функция, $\Phi\colon\mathcal{M}_n{\to}\mathbb{R}^1$ — заданная функция.

Заметим, что условия существования решений системы (3) можно записать в терминах условий восстановления отображения $f(x)$ по матрице $M_f(x) = \frac{f'(x)}{\Phi(f'(x))}$. При этом матрицу $M_f(x)$ договоримся называть нормированной матрицей Якоби отображения $f(x)$.

Будем использовать следующие обозначения дифференциальных 1-форм

$$M^i(x) = m_{i1}(x)dx^1 + \ldots + m_{in}(x)dx^n \ (i = 1, ..., n)\,,$$

$$M^i_f(x) = \frac{df^i(x)}{\Phi(f'(x))} \ \ (i = 1, ..., n)\,,$$

$$\Lambda(M(x)) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cdot\frac{M^i(x)}{\det M(x)}\cdot *_n d\Big(M^1(x)\wedge \overset{i}{\dots\vee\dots} \wedge M^n(x)\Big),$$

где знак $\overset{i}{\vee}$ означает, что во внешнем произведении дифференциальных 1-форм множитель $M^i(x)$ должен быть пропущен, а $*_n$ есть оператор Ходжа, действующий на форму $\omega(x)$ степени n (такую форму в $\mathbb{R}^n$ всегда можно записать в виде $\omega(x) = c(x)\,dx^1\wedge ... \wedge dx^n$) по правилу

$$*_n\Big(c(x)\,dx^1\wedge ... \wedge dx^n\Big) = c(x).$$

В дальнейшем класс матриц $M(x)$, которым сопоставляется форма $\Lambda(M(x))$, будет уточнен.

Глава 2 «Восстановление отображения по матрице Якоби, нормированной некоторой функцией (гладкий случай)» содержит исследование системы дифференциальных уравнений (3) и поиск условий ее интегрируемости в гладком случае.

Основным результатом **§2.1** является следующая теорема о необходимых условиях существования решений системы (3).

Теорема 2.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ и $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $C^2(D)$ такое, что $\det f'(x) \neq 0$ всюду в D и для функции $\Phi\colon \mathcal{M}_n{\to}\mathbb{R}^1$, непрерывно дифференцируемой по компонентам ее матрицы-аргумента, выполнено $\Phi(f'(x)) \neq 0$ всюду в D.*

Тогда справедливо равенство

$$d \ln |\Phi(f'(x))| = \Lambda(M_f(x)). \tag{4}$$

В **§2.2** при некоторых дополнительных требованиях на Φ получены достаточные условия существования решений системы (3) и найдены интегральные представления указанных решений.

Определение. *Пусть $M\colon D{\to}\mathcal{M}_n$ — произвольная матричнозначная функция, заданная в области D, $D{\subseteq}\mathbb{R}^n$. Договоримся называть функцию $\Phi\colon \mathcal{M}_n{\to}\mathbb{R}^1$ положительно однородной в случае, если для любого $\alpha{\in}\mathbb{R}^1$, $\alpha{\neq}0$ выполнено $\Phi(\alpha M(x)){=}|\alpha|\Phi(M(x))$.*

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.2. *Пусть матрица $M(x) \in C^2(D)$ имеет размерность $n \times n$, $\det M(x) \neq 0$, $x{\in}D$ (D — односвязная область в $\mathbb{R}^n$, $n{\geqslant}3$) и такова, что $dM^i{=}M^i{\wedge}\,\Lambda(M)$, $i{=}1,...,n$. Пусть функция $\Phi\colon \mathcal{M}_n{\to}\mathbb{R}^1$ дважды непрерывно дифференцируема по компонентам ее матрицы-аргумента, а также является положительно однородной функцией, удовлетворяющей условию $|\Phi(M(x))|{=}1$ в области D и не меняющей в ней знак.*

Тогда существует единственное отображение $f_0\colon D{\to}\mathbb{R}^n$ класса $C^3(D)$, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений (3) и условиям нормировки

$$f_0(a) = A, \quad \Phi(f_0'(a)) = |r|{\cdot}\Phi(M(a))$$

(здесь фиксированы $a{\in}D$, $A{\in}\mathbb{R}^n$, $r{\in}\mathbb{R}^1$, $r{\neq}0$).

При этом $f_0(x)$ представимо в виде

$$f_0^i(x) = A^i + |r|\,\Phi(M(x)) \int_a^x e^{\int_a^y \Lambda(M(z))} M^i(y) \ (i{=}1,\ldots,n). \tag{5}$$

Следствие 2.2.1. *При $n{=}2$ утверждения теоремы 2.2 остаются в силе, если дополнительно выполнено равенство $d\Lambda(M(x)) = 0$.*

Результаты второй главы являются вспомогательными для основой, третьей главы.

Глава 3 «Восстановление отображения по матрице Якоби, нормированной некоторой функцией (соболевские классы функций)» содержит исследования задачи о восстановлении отображения $f(x)$ по его нормированной матрице Якоби $M_f(x)$ в случае принадлежности этой матрицы следующему классу.

Определение. *Будем говорить, что функция* $M\colon D\to\mathcal{M}_n$ *принадлежит классу* $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$ $(\alpha\geqslant 1,\ \beta\geqslant 1,\ \gamma\geqslant 1)$*, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) элементы матрицы $M(x)$*, то есть функции* $m_{ij}\colon D\to\mathbb{R}^1$ $(i,j=1,\dots,n)$ *— измеримы в* D*;*

2) дифференциальные формы $M^i=\sum_{j=1}^n m_{ij}\,dx^j$ $(i=1,\dots,n)$ *принадлежат пространству* $L_\alpha(D)$ *и обладают обобщенными дифференциалами* dM^i *класса* $L_\beta(D)$*;*

3) функция $|M(x)|/\det M(x)$ *принадлежит классу* $L_\gamma(D)$.

Здесь и далее используются следующие обозначения

$$|M(x)|=\Big(\sum_{i,j=1}^n m_{ij}^2(x)\Big)^{1/2} \quad \text{и} \quad |dM(x)|=\Big(\sum_{i=1}^n |dM^i(x)|^2\Big)^{1/2},$$

где $|dM^i(x)|$ — евклидова норма 2-формы $dM^i(x)$.

В **§3.1** для матриц класса $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$ доказано утверждение.

Лемма 3.1. *Если матрица* $M\colon D\to\mathcal{M}_n$ *принадлежит классу* $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$*, то* $\det M(x)\neq 0$ *почти всюду в* D.

В таком случае форма $\Lambda(M(x))$ определена почти всюду в D и для нее получены следующие оценки.

Лемма 3.2. *Пусть* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$*. Если функция* $M\colon D\to\mathcal{M}_n$ *принадлежит классу* $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$*, то евклидова норма дифференциальной формы* $\Lambda(M(x))$ *почти всюду в области* D *удовлетворяет неравенству*

$$|\Lambda(M(x))|\leqslant \frac{\sqrt{n}}{|\det M(x)|}\cdot|M(x)|^{n-1}\cdot|d\,M(x)|\,. \qquad (6)$$

Кроме того, если величины α, β, γ удовлетворяют условиям $\alpha>n-2$, $\beta>1$, $\gamma>1$, $1 \geqslant \frac{n-2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$, то дифференциальная 1-форма $\Lambda(M(x))$ суммируема по Лебегу со степенью $\xi = \frac{1}{\frac{n-2}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$ ($\xi \geqslant 1$) и

$$\|\Lambda(M)\|_{\xi,\,D} \leqslant \sqrt{n}\cdot \| |M|^{n-2} \|_{\xi p_1,\,D} \cdot \| |dM| \|_{\xi p_2,\,D} \cdot \| \frac{|M|}{\det M} \|_{\xi p_2,\,D} < \infty \quad (7)$$

(где $p_1>1$, $p_2>1$, $p_3>1$ — некоторые самосопряженные значения, то есть такие, что $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$).

В **§3.1** также доказаны вспомогательные утверждения о взаимосвязях дифференциальных форм M^i, dM^i и $\Lambda(M)$. Приведем формулировку одного из них.

Лемма 3.8. *Пусть $M(x)$ — матричнозначная функция класса $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$, D — область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) и величины α, β, γ такие, что $\alpha > n-2$, $\beta > 1$, $\gamma > 1$, $1 \geqslant \frac{n-2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$. Пусть для $M(x)$ выполнены следующие условия:*

I) при n=2 форма $\Lambda(M)$ замкнута;

II) при $n\geqslant 3$ форма $\Lambda(M)$ обладает обобщенным дифференциалом класса $L_{\zeta,\,loc}(D)$, где $\zeta\geqslant 1$ — некоторое число, и $M(x)$ удовлетворяет почти всюду в D соотношениям

$$d\,M^i \wedge M^j + d\,M^j \wedge M^i = 0 \ (i,j = 1,\ldots,n). \quad (8)$$

Тогда форма $\Lambda(M)$ замкнута и почти всюду в D справедливо

$$d\,M^i = M^i \wedge \Lambda(M) \ (i = 1,\ldots,n). \quad (9)$$

Решение системы (3) будем понимать в следующем смысле.

Определение. *Пусть $M(x)\in\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$, где D — область в $\mathbb{R}^n$ ($n\geqslant 2$). Отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ принадлежащее $W^1_{p,\,loc}(D)$, $p\geqslant 1$ назовем решением системы (3), если обобщенные производные $\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j}$ почти всюду в D удовлетворяют равенствам*

$$\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} = \Phi(f'(x))\cdot m_{ij}(x) \ \ (i,j = 1,\ldots,n).$$

В параграфе **§3.2** найдены достаточные условия существования решений системы дифференциальных уравнений (3). Получены интегральные представления указанных решений, использующие в своих формулировках оператор, обозначенный здесь через S_D (с. 54). S_D является одним из интегральных операторов соболевского типа, которые часто применяются для восстановления функций классов $W_p^1(D)$, заданных в звездной относительно шара области D, по их обобщенным производным первого порядка. В данном случае выбранный для использования оператор S_D представляет собой оператор, распространенный на 1-формы с суммируемыми коэффициентами.

Использование результатов предыдущего параграфа позволяет получить следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть D — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$, звездная относительно шара B, $\overline{B}\subset D$. Пусть функция $M\colon D\to\mathcal{M}_n$ удовлетворяет условиям леммы 3.8, где величины α, β, γ таковы, что $\alpha > n(n-2)$, $\beta > n$, $\gamma > n$, $\frac{1}{n} \geqslant \frac{n-2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$, а функция $\Phi\colon \mathcal{M}_n\to D$ является измеримой положительно однородной функцией, удовлетворяющей условию $|\Phi(M(x))|=1$ почти всюду в области D и обладающей обобщенным дифференциалом $d\Phi(M(x))$ класса $L_q(D)$, где $q>\frac{\alpha}{\alpha-1}>1$ — некоторое число.*

Тогда решением системы уравнений (3) является отображение $f_0(x) = (f_0^1(x), ..., f_0^n(x))$, где

$$f_0^i(x) = \Phi(M(x))S_D\Big(e^{S_D\Lambda(M(x))}M^i(x)\Big)\,. \qquad (10)$$

При этом справедливы следующие утверждения.

1) $d\ln|\Phi(f_0'(x))|=\Lambda(M(x))$.

2) Если $\frac{1}{\frac{n-2}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} = n$, то функция $\Phi(f_0'(x))$ принадлежит пространству $L_\sigma(D)$ для каждого $\sigma\geqslant 1$ и обладает обобщенным дифференциалом класса $L_\nu(D)$ для каждого ν, $1\leqslant\nu<\frac{1}{\frac{n-2}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}=n$.

3) Если $\frac{1}{\frac{n-2}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} > n$, то функция $\Phi(f_0'(x))$ принадлежит пространству $L_\sigma(D)$ для каждого $\sigma\geqslant 1$, обладает обобщенным дифференциалом класса $L_\nu(D)$, $\nu=\frac{1}{\frac{n-2}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$, а также почти всюду в области D выполняется неравенство

$$e^{-C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)} \leqslant |\Phi(f_0'(x))| \leqslant e^{C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)}.$$

Здесь $C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)$ — постоянная, зависящая от α, β, γ, n, D и M, как от заранее заданных параметров.

В работе получен ряд следствий теоремы 3.2 о функциональных принадлежностях решений системы (3). В частности, справедливо утверждение.

Следствие 3.2.3. *Если в условиях теоремы 3.2 функция* $\det M(x)$ *почти всюду в области* D *одного знака и существует такое число* Q_M, *что почти всюду в области* D *имеет место неравенство*

$$\Big(\sup_{|h|=1} |M(x)h|\Big)^n \leqslant Q_M |\det M(x)|\,,$$

то отображение $f_0(x)$, *представленное равенствами (10), является отображением с ограниченным искажением в каждом множестве* Δ, $\Delta \subseteq D$, *звездном относительно некоторого шара, содержащемся в* D.

В последнем параграфе **§3.3** для классов функций с обобщенными в смысле С.Л. Соболева производными доказан аналог необходимых условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений (3), полученных предварительно в гладком случае (см. теорему 2.1).

Теорема 3.3. *Пусть* D *— область в* $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *— отображение класса* $W^1_{q,\,loc}(D)$ $(q \geqslant 1)$ *и* $\Phi\colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^1$ *— некоторая функция, задающая, при указанном фиксированном* f, *измеримую неотрицательную функцию* $\Phi(f'(x))$ *так, что* $\Phi(f'(x)) > 0$ *почти всюду в* D.

Пусть матрица $M_f(x) = \frac{f'(x)}{\Phi(f'(x))}$ *принадлежит классу* $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$, *где величины* α, β, γ *удовлетворяют следующим ограничениям* $\alpha > n(n-2)$, $\beta > n$, $\gamma > n$, $\frac{1}{n} \geqslant \frac{n-2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

Пусть, кроме того, существует $s \geqslant \frac{1}{\frac{n-2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}}$ $(\geqslant n \geqslant 2 > 0)$ *такое, что функция* $\Phi^s(f'(x))$ *принадлежит классу* $W^1_{1,\,loc}(D)$.

Тогда почти всюду в D *при* $n \geqslant 2$ *справедливы равенства*

$$d \ln \Phi(f'(x)) = \Lambda(M_f(x)), \tag{11}$$

$$dM^i_f(x) = M^i_f(x) \wedge \Lambda(M_f(x)), \tag{12}$$

а при $n \geqslant 3$ *справедливы также равенства*

$$dM^i_f(x) \wedge M^j_f(x) + M^i_f(x) \wedge dM^j_f(x) = 0. \tag{13}$$

В диссертации мы не конкретизируем вид функции Ф, требуя для нее только некоторых дифференциальных свойств и, иногда, однородность.

Заключение настоящей работы содержит основные итоги диссертационного исследования.

Список работ автора, опубликованных по теме диссертации

[1] Егоров, В.В. О системах дифференциальных уравнений, возникающих в теории квазиконформных отображений / В.В. Егоров // Деп. в ВИНИТИ № 2777 — В97, 29.08.97, 16 с.

[2] Егоров, В.В. Об интегрируемости одной системы дифференциальных уравнений с частными производными, возникающей в теории квазиконформных отображений / В.В. Егоров // Деп. в ВИНИТИ № 1816 — В98, 17.06.98, 15 с.

[3] Егоров, В.В. О системе дифференциальных уравнений, возникающей в теории отображений с ограниченным искажением / В.В. Егоров // IV Межвузовская конференция студентов и молодых ученых г. Волгограда и Волгоградской области, г. Волгоград, 1998 г.: Тез. докл. / ВолГУ. — Волгоград: Изд. ВолГУ, 1999. — С. 113–114.

[4] Егоров, В.В. О системе дифференциальных уравнений, описывающей отображения, близкие к растяжению / В.В. Егоров // Вестник ВолГУ, Серия 1 (Математика), Вып.8, 2003–2004, Волгоград: Изд. ВолГУ, 2004. — С. 18–27.

[5] Егоров, В.В. Об интегрируемости системы дифференциальных уравнений, описывающей отображения, близкие к растяжению / В.В. Егоров // Геометрический анализ и его приложения: Тез. докл. международ. школы-конференции. — Волгоград: Изд. ВолГУ, 2004. — С. 48–50.

[6] Егоров, В.В. Восстановление отображения по матрице Якоби, нормированной однородной функцией / В.В. Егоров // Известия Са-

ратовского университета. 2007. Т. 7. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. — С. 14–20.

[7] Егоров, В.В. О достаточных условиях восстановления отображений соболевского класса / В.В. Егоров // Труды мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 36 // Материалы Шестой молодежной научной школы-конференции “Лобачевские чтения – 2007”. — Казань: Изд. Казанского математического общества, 2007. С. 72-74.

[8] Егоров, В.В. О необходимых условиях восстановления отображений соболевского класса / В.В. Егоров // Тез. докл. 14-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения” — Саратов: Изд. Саратовского ун-та, 2008. С. 71-72.